

CHAPTER 18 비선형계획법

경영·경제분석을 위한 핵심 수학(6판)

연습문제 풀이 이용 안내

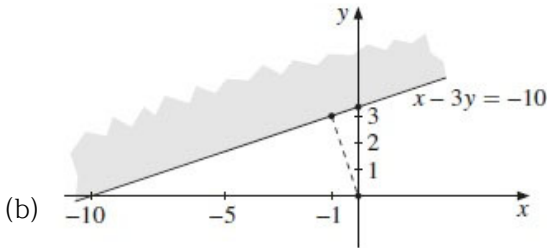
- 본 문제 풀이의 저작권은 원서 저작권자(Knut Sydsæter, Arne Strøm, Peter Hammond, Andrés Carvajal)와 Pearson, 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전제하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

CHAPTER 18 비선형계획법

18.1 이변수함수와 하나의 제약조건

1.

(a) $(x,y)=(-1,3)$



2.

(a) $x = x(p,q,m) = \frac{mq}{p(p+q)}, y = y(p,q,m) = \frac{mp}{q(p+q)}$

(b) 차수 0의 동차함수이다.

3.

(a) (i) $\frac{\partial L}{\partial x} = -x - 6\lambda = 0$, (ii) $\frac{\partial L}{\partial y} = -4 + 4\lambda = 0$, (iii) $\lambda \geq 0$ ($6x - 4y < a$ 이면 $\lambda = 0$)

(b) $x = -6, y = -9 - \frac{1}{4}a$

4.

(a) $L(x,y) = x^2 + 2y^2 - x - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

(i) $2x - 1 - 2\lambda x = 0$, (ii) $4y - 2\lambda y = 0$

(b) $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \left(1, 0, \frac{1}{2}\right), \left(-1, 0, \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$

(c) $\left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$ 에서 최댓값 $\frac{9}{4}$ 를 가진다.

5.

(a) $a \in (0,1)$ 인 경우 $(x,y,\lambda) = (\sqrt{a}, 0, a^{-1/2} - 1)$

$a \geq 1$ 인 경우 $(x,y,\lambda) = (1, 0, 0)$

(b) 증명 생략

(c) 증명 생략

6.

$a > \alpha$ 인 경우 $Q^* = \frac{a - \alpha}{2(b + \beta)}$

$a \leq \alpha$ 인 경우 $Q^* = 0$

CHAPTER 18 비선형계획법

18.2 다변수함수와 부등식 제약조건

1.

$$(a) \mathcal{L} = \frac{1}{2}x - y - \lambda_1(x + e^{-x} - y) - \lambda_2(-x)$$

$$(i) \frac{1}{2} - \lambda_1(1 - e^{-x}) + \lambda_2 = 0, (ii) -1 + \lambda_1 = 0, (iii) \lambda_1 \geq 0 \ (x + e^{-x} < y \text{ 이면 } \lambda_1 = 0), (iv) \lambda_2 \geq 0 \ (x > 0 \text{ 이면 } \lambda_2 = 0)$$

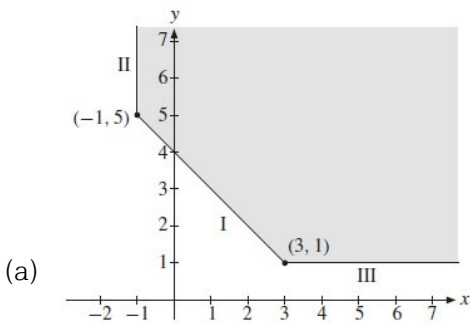
$$(b) \left(\ln 2, \ln 2 + \frac{1}{2} \right)$$

2.

$$m \leq \frac{p\bar{x}}{\alpha} \text{ 이면 } (x^*, y^*) = \left(\frac{m\alpha}{p}, \left(1 - \frac{\alpha m}{q} \right) \right)$$

$$m > \frac{p\bar{x}}{\alpha} \text{ 이면 } (x^*, y^*) = \left(\bar{x}, \frac{m - p\bar{x}}{q} \right)$$

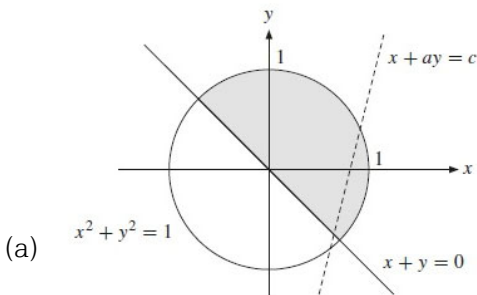
3.



$$(b) (x, y) = (-1, 5)$$

$$(c) (x, y) = (-1, 5)$$

4.



$$(i) \mathcal{L}'_x = 1 - 2\lambda x + \mu = 0, (ii) \mathcal{L}'_y = a - 2\lambda y + \mu = 0, (iii) \lambda \geq 0 \ (x^2 + y^2 < 1 \text{ 이면 } \lambda = 0), (iv) \mu \geq 0 \ (x + y > 0 \text{ 이면 } \mu = 0), (v) x^2 + y^2 \leq 1, (vi) x + y \geq 0$$

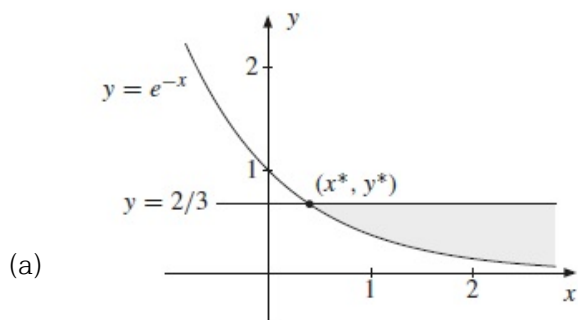
$$(b) a \leq -1 \text{ 이면 } (x^*, y^*) = \left(\frac{1}{2} \sqrt{2}, -\frac{1}{2} \sqrt{2} \right), a > -1 \text{ 이면 } (x^*, y^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \right)$$

5.

$$(4^{-2/3}, 4^{-1/3})$$

CHAPTER 18 비선형계획법

6.



- (b) (i) $\mathcal{L}'_x = -2\left(x + \frac{1}{2}\right) + \lambda e^{-x} = 0$, (ii) $\mathcal{L}'_y = -y + \lambda - \mu = 0$, (iii) $\lambda \geq 0$ ($e^{-x} - y < 0$ 이면 $\lambda = 0$), (iv) $\mu \geq 0$ ($y < \frac{2}{3}$ 이면 $\mu = 0$), (v) $e^{-x} - y \leq 0$, (vi) $y \leq \frac{2}{3}$.

해는 $\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right), \frac{2}{3}\right)$

7.

- (a) (i) $z - 2\lambda x = 0$, (ii) $z - 2\lambda y = 0$, (iii) $x + y - 2\lambda z = 0$, (iv) $\lambda \geq 0$ ($x^2 + y^2 + z^2 < 1$ 이면 $\lambda = 0$)

(b) $(x, y, z) = \pm\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

CHAPTER 18 비선형계획법

18.3 음이 아닌 제약조건

1.

(a) (i) $\mathcal{L}'_1(x^*, y^*) = 1 - 16\lambda \leq 0$ ($x^* > 0$ 이면 $= 0$), (ii) $\mathcal{L}'_2(x^*, y^*) = \frac{1}{1+y^*} - \lambda \leq 0$ ($y^* > 0$ 이면 $= 0$), (iii) $\lambda \geq 0$
($16x^* + y^* < 495$ 이면 $\lambda = 0$), (iv) $x^* \geq 0, y^* \geq 0$, (v) $16x^* + y^* \leq 495$

(b) $(x^*, y^*) = (30, 15)$

(c) 대략 $\frac{5}{16}$ 만큼 증가

2.

$(x, y) = (1, 0)$

3.

$(x_1^*, x_2^*, k^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$

CHAPTER 18 비선형계획법

CHAPTER 18 복습문제

18.1

$a \geq 5$ 인 경우 $(x, y) = (2, 1)$

$a < 5$ 인 경우 $(x, y) = \left(2\sqrt{\frac{a}{5}}, \sqrt{\frac{a}{5}}\right)$

18.2

(a) (i) $\mathcal{L}'_1 = y^* - 2\lambda_1 x^* + \lambda_2 = 0$, (ii) $\mathcal{L}'_2 = x^* - 2r\lambda_1 y^* = 0$, (iii) $\lambda_1 \geq 0$ ($(x^*)^2 + r(y^*)^2 < m$ 이면 $\lambda_1 = 0$),

(iv) $\lambda_2 \geq 0$ ($x^* > 1$ 이면 $\lambda_2 = 0$), (v) $(x^*)^2 + r(y^*)^2 \leq m$, (vi) $x^* \geq 1$

(b) $m \geq 2$ 인 경우 $(x^*, y^*) = \left(\sqrt{\frac{m}{2}}, \sqrt{\frac{m}{2r}}\right)$

$1 < m < 2$ 인 경우 $(x^*, y^*) = \left(1, \sqrt{\frac{m-1}{r}}\right)$

(c) $m \geq 2$ 인 경우 $\frac{\partial V(r, m)}{\partial m} > 0$

(d) 증명 생략

18.3

(a) $(x_1, x_2) = \left(2000, \frac{2000}{3}\right)$

(b) 풀이 생략

(c) $0 \leq a \leq \frac{1}{24}$

18.4

일계조건 (i) $R'(Q^*) - C'(Q^*) + \lambda = 0$, (ii) $\lambda \geq 0$ ($Q^* > 0$ 이면 $\lambda = 0$)

$R'(0) \leq C'(0)$

18.5

(a) $\max(-rK - wL)$ s.t. $-\sqrt{KL} \leq -Q$

KKT 조건 (i) $L'_K = -r + \lambda \left(\frac{\sqrt{L^*}}{2\sqrt{K^*}}\right) = 0$, (ii) $L'_L = -w + \lambda \left(\frac{\sqrt{K^*}}{2\sqrt{L^*}}\right) = 0$, (iii) $\lambda \geq 0$ ($\sqrt{K^*L^*} > Q$ 이면 $\lambda = 0$).

$$K^* = Q\sqrt{\frac{w}{r}}, L^* = Q\sqrt{\frac{r}{w}}$$

(b) 증명 생략